THE VIDYARTHI

Roll. No. : .....

6319

B.A./B.Sc. (Third Semester) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper Second

(Group Theory)

Time : 2 Hours] **[Maximum Marks : B.Sc. : 75**

B.A. : 55

Note : There are two sections A and B in this paper. Attempt questions from both sections as directed.

इस प्रश्न पत्र में दो खण्ड 'अ' और 'ब' हैं। दोनों खण्डों से निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A / खण्ड-अ { B.Sc. $4 \times 10 = 40$; B.A. $4 \times 7 = 28$

Note : Attempt any 04 questions out of 10.

कुल 10 में से 04 प्रश्नों को हल कीजिए।

1. Prove that if R is an equivalence relation on a set A, then R^{-1} is also an equivalence relation on A.

सिद्ध करें कि यदि R एक समुच्चय A पर तुल्यता सम्बन्ध है तब R^{-1} भी A पर तुल्यता सम्बन्ध होगा।

2. Let Q be the set of rational numbers. Let $f : Q \to Q$ be defined by $f(x) = 2x + 3$ $(x \in Q)$. Show that f is one and onto.

माना कि Q एक परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। यदि $f : Q \to Q$, $f(x) = 2x + 3$ $(x \in Q)$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f एकैक आच्छादित प्रतिचित्रण है।

3. Let A, B, C be sets and let $R \subseteq A \times B$ and $S \subseteq B \times C$. Then prove that :

THE VIDYARTHI

$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

यदि A, B, C समुच्चय हैं और $R \subseteq A \times B$ और $S \subseteq B \times C$ तब सिद्ध करें कि

$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

4. Prove that the relation "congruence modula m" is an equivalence relation in the set of integers.

सिद्ध कीजिए कि "कांग्रेन्स माडयूलों m" का सम्बन्ध पूर्णांकों के समुच्चय पर तुल्यता सम्बन्ध है।

5. Show that the set of all positive rational numbers forms an abelian group under the composition defined by $a * b = \frac{(ab)}{2}$.

सिद्ध कीजिए कि सभी धनात्मक परिमेय संख्याएँ $a * b = \frac{(ab)}{2}$ की परिभाषित रचना के साथ एक अबेली समूह बनाती है।

6. Show that the four fourth root of unity namely 1, –1, i, –i forms a group with respect to multiplication.

सिद्ध कीजिए कि इकाई के चार चतुर्थ मूल 1, –1, i, –i गुणन के लिए समूह बनाते हैं।

THE VIDYARTHI

7. If H_1 and H_2 are two subgroups of a group G, then prove that $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G.

यदि H_1 और H_2 एक समूह G के दो उपसमुच्चय हैं तब सिद्ध करें $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमुच्चय है।

8. Any two right cosets of a group are either disjoint or identical. Prove.

एक समूह के कोई दो दायें कोसैट या तो विच्छेद होंगे या एक-समान होंगे। सिद्ध करें।

9. Let $f : G \to G'$ be a group homomorphism. Then show that homomorphic image f(G) of G is a subgroup of G'.

यदि $f : G \to G'$ एक समूह होमोमार्फिज्म है। तब सिद्ध कीजिए कि G का होमोमार्फिक प्रतिबिम्ब f(G), G' का उपसमूह है।

10. Let N be a normal subgroup of a group G and H a subgroup of G. Then NH is a subgroup of G. Prove.

यदि N, समूह G का एक सामान्य उपसमूह है और H, समूह G का एक उपसमूह है। तब NH, G का एक उपसमूह होगा। सिद्ध करें।

THE VIDYARTHI

Section-B / खण्ड-ब $\begin{cases} \text{B.Sc. } 2 \times 17.5 = 35 \\ \text{B.A. } 2 \times 13.5 = 27 \end{cases}$

Note : Attempt any 02 questions out of 04.

दिये गये कुल 04 प्रश्नों में से कोई 02 प्रश्न हल कीजिए।

11. If $f : x \to y$ and $A.B \subseteq x$ then prove that :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

यदि $f : x \to y$ और $A.B \subseteq x$ तब सिद्ध कीजिए :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

12. The set P_n of all permutations on n symbols is a finite group of order n! with respect to composite of mappings as the operation. For $n \leq 2$ this group is abelion and for $n > 2$ it is always non abelian. Prove.

n चिन्हों के समस्त क्रमचयों का समुच्चय P_n, n! क्रम का एक सीमित समुच्चय बनाता है जिसमें संक्रिया प्रतिचित्रण का समग्र है। $n \leq 2$ के लिए समूह अबेली है तथा $n > 2$ के लिए समूह अबेली नहीं है। सिद्ध करें।

13. State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रान्जे प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

14. If f is a homeomorphism of a group G into a group G' with kernel K, then K is a normal subgroup of G. Prove.

यदि f एक समूह G से समूह G' पर होम्योमार्फिज्म है जिसका कर्नल K है तब K, G का एक सामान्य उपसमूह है। सिद्ध करें।

THE VIDYARTHI