6218

B. A./B. Sc. (Second Semester) EXAMINATION, 2018

MATHEMATICS

Paper First

(Group Theory)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 75*

Note : There are three Sections A, B and C in this paper. Section A is compulsory. Attempt *four* questions from Section B any *two* questions from Section C. Marks allotted to each question are indicated against them. Answer the questions in serial order as far as possible. Symbols used have their usual meanings.

इस प्रश्न-पत्र मे 'अ', 'ब' तथा 'स' तीन खण्ड है। खण्ड 'अ' अनिवार्य है। खण्ड 'ब' से चार प्रश्न तथा खण्ड 'स' से कोई दो प्रश्न हल कीजिए। प्रश्नों को आवंटित अंक इंगित है। जहाँ तक सम्भव हो प्रश्नों के उत्तर क्रम से दें। प्रयुक्त संकेतो के सामान्य अर्थ हैं।

Section—B

(खण्ड—ब)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. State and prove Lagrange's theorem and also show that converse of Lagrange's theorem is not true. $7\frac{1}{2}$

लैग्रांज प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए और दिखाइए इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

3. State and prove Cayley's theorem. $7\frac{1}{2}$

कैली प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

4. (a) Define a group. Prove that $(Z, *)$ where Z is set of integers and $*$ is given by $a * b = a + b + 1$, $\forall a, b \in Z$ is a group. 4

एक समूह की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि $(Z, *)$ जहाँ Z पूर्णांकों का समुच्चय है और संक्रिया $*$ निम्नवत् है :

$$a * b = a + b + 1, \forall a, b \in Z$$

एक समूह है।

(b) Give an example to show that union of two subgroups need not be a subgroup. $3\frac{1}{2}$

एक उदाहरण देकर सिद्ध कीजिए कि दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह नहीं होता है।

5. (a) Prove that $H_1 \cap H_2$ is a subgroup of G where H_1 and H_2 are two subgroups of G. $2/4\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिये कि $H_1 \cap H_2$, G का एक उपसमूह है जहाँ H_1 और H_2, G के दो उपसमूह हैं।

(b) Show that every cyclic group is an abelian group. $2/4\frac{1}{2}$

दर्शाइये कि प्रत्येक चक्रीय समूह एक आबेली समूह है।

6. (a) Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup. $2/4\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह के दो नॉर्मल उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक नॉर्मल उपसमूह होता है।

(b) Form the composition table for the quotient group $\frac{P_3}{A_3}$ where P_3 be the symmetric group on three symbols a, b, c and A_3 be the alternating group on three symbols a, b, c. $2/4\frac{1}{2}$

विभाग समूह $\frac{P_3}{A_3}$ के लिये संघटन तालिका बनाइये जहाँ P_3 a, b, c में एक सममित समूह है और A_3 प्रतीक a, b, c में वैकल्पिक समूह है।

7. Show that the necessary and sufficient condition for a homomorphism f of a group G into a group G′ with Kernel K to be an isomorphism of G into G′ is that $K = \{e\}$. 4/9

दर्शाइये कि $K = \{e\}$, किसी समूह G से समूह G′ में समकारिता f के तुल्यकारिता होने के लिये आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध है।

8. (a) Prove that $N(a)$, the normalizer of a in group G is the subgroup of G. $2/4\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिये कि $a \in G$, का नॉर्मलाइजर $N(a)$, समूह G का उपसमूह है।

(b) Prove that the centre Z of a group G is a normal subgroup of G. $2/4\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिये कि समूह G का केन्द्र Z, G का ही नॉर्मल उपसमूह होता है।

Section—B 5/10

(खण्ड—ब)

9. (a) Prove that the order of every element of a finite group is finite and is less than or equal to the order of G. $2\frac{1}{2}/5$

सिद्ध कीजिये कि एक परिमित समूह के प्रत्येक अवयव का क्रम परिमित होता है और यह उससमूह के क्रम के बराबर या उससे छोटा होता है।

(b) If G is an abelian group for $a, b \in G$, then show that $(ab)^n = a^n b^n$ where n is an integer. $2\frac{1}{2}/5$

यदि सभी $a, b \in G$ के लिये G एक आबेली समूह है, तब दर्शाइये कि $(ab)^n = a^n b^n$, जहाँ n एक पूर्णांक है।

Or

(अथवा)

Show that the set P_n of all permutations is a finite group of order $n!$ with respect to composition of mapping as the operation and $n \le 2$ this group is abelian and for $n > 2$ the group is non-abelian. 5/10

दर्शाइये कि P_n एक संक्रिया फलनों के गुणन के साथ क्रम $n!$ का परिमित समूह है तथा $n \le 2$ के लिये यह समूह आबेली एवं $n > 2$ के लिये नॉन-आबेली होता है।

10. (a) State and prove Lagrange's theorem and also show that the converse of Lagrange's theorem is not true. $2\frac{1}{2}/5$

लैग्रांज प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिये और दिखाइये कि इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

(b) Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if the product of two right costs of H in G is again a right cost of H in G. $2\frac{1}{2}/5$

सिद्ध कीजिये कि एक उपसमूह H, समूह G का एक नॉर्मल उपसमूह होगा यदि और केवल यदि जब दो दक्षिण सहसमुच्चयों का गुणन फिर से दक्षिण सहसमुच्चय होगा।

Or

(अथवा)

(a) Show that a necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is that $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is the inverse of b in G. $2\frac{1}{2}/5$

दर्शाइये कि समुच्चय H के किसी समूह G के उपसमूह होने के लिये $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ एक आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है, जहाँ b^{-1}, b का प्रतिलोम है।

(b) Show that the union of two subgroups of a group G is a subgroup if and only if one is contained in the other. $2\frac{1}{2}/5$

दर्शाइये कि समूह G के दो उपसमूहों का संघ भी एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि इनमें से एक दूसरे में निहित हो।

11. (a) Prove that the set of all cosets of a normal subgroup is a group with respect to multiplication of complexes as the composition. $2\frac{1}{2}/5$

सिद्ध कीजिये कि किसी एक नॉर्मल उपसमूह के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय संक्रिया सहसमुच्चयों के गुणन के साथ एक समूह बनाता है।