THE VIDYARTHI

6118

B. A./B. Sc. (First Semester) EXAMINATION, 2019-20

MATHEMATICS

Paper First

(Elementary Algebra, Matrices and Trigonometry)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks :* $\begin{cases} B.A. & : 35 \\ B.Sc. & : 75 \end{cases}$

Note : There are two Sections A and B in this paper. Attempt any *five* questions from Section A. Section B is compulsory. Marks allotted to each question are indicated against them. Answer the questions in serial order as far as possible. Symbols used have their usual meanings.

इस प्रश्न-पत्र में 'अ' तथा 'ब' दो खण्ड हैं। खण्ड 'अ' से कोई पाँच प्रश्न हल कीजिए। खण्ड 'ब' अनिवार्य है। अंक सामने दिये गये हैं। जहाँ तक सम्भव हो प्रश्नों के उत्तर क्रम से दें। प्रयुक्त संकेतों के सामान्य अर्थ हैं।

Section—A 4/9 each

(खण्ड–अ)

1. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, show that $A^2 - 4A - 5I = O$.

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि

$A^2 - 4A - 5I = O$ ।

2. Find the inverse of the matrix A given below :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

THE VIDYARTHI

आव्यूह A की व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए जबकि :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Locate the situation of the roots of the equation given below :

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

नीचे दी गई समीकरण के मूलों की स्थितियों का निर्धारण कीजिए :

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

4. If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the roots of the equation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, from an equation whose roots are $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$.

यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ समीकरण $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ के मूल हों, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \delta^2$ हैं।

5. (a) Prove that :

$$\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

THE VIDYARTHI

सिद्ध कीजिए कि :

$$\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Resolve the following into real and imaginary parts :

$$\exp \sin(x + iy)$$

निम्नलिखित को वास्तविक तथा काल्पनिक भागों में विभक्त कीजिए :

$$\exp \sin(x + iy)$$

6. (a) Prove that :

$$\cos(\alpha - i\beta) - i\sin(\alpha - i\beta) = e^{-\beta}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\cos(\alpha - i\beta) - i\sin(\alpha - i\beta) = e^{-\beta}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

(b) Sum the following series :

$$1 - \frac{1}{3.4^2} + \frac{1}{5.4^2} - + \ldots\ldots \infty$$

निम्नलिखित श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$1 - \frac{1}{3.4^2} + \frac{1}{5.4^2} - + \ldots\ldots \infty$$

7. Define the following :

(a) Idempotent matrix

(b) Nilpotent matrix

(c) Trace of a matrix

(d) Hermitian matrix

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए :

(अ) आइडेमपोटेन्ट आव्यूह

(ब) निलपोटेन्ट आव्यूह

(स) किसी आव्यूह का ट्रेस

(द) हर्मीशियन आव्यूह

THE VIDYARTHI

8. Solve the equation $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ whose roots are in the arithmetic progression.

समीकरण $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ को हल कीजिए जबकि इसके मूल समान्तर श्रेणी में हैं।

Section—B

(खण्ड—ब)

5/10 each

9. Sum the following series :

$$c\cos\alpha + \frac{c^3}{3}\cos 3\alpha + \frac{c^5}{5}\cos 5\alpha + \ldots\ldots$$

निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

$$c\cos\alpha + \frac{c^3}{3}\cos 3\alpha + \frac{c^5}{5}\cos 5\alpha + \ldots\ldots$$

Or

(अथवा)

THE VIDYARTHI

Sum the following series :

$\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 2^2\theta + \ldots\ldots$ (upto n terms)

निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

$\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 2^2\theta + \ldots\ldots$ (n पदों तक)

10. Solve the following by matrix method :

$$2x - y + 3z = 9$$
$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$

निम्नलिखित को आव्यूह विधि द्वारा हल कीजिए :

$$2x - y + 3z = 9 \quad 1$$
$$x + y + z = 6 \quad 2$$
$$x - y + z = 2 \quad 3$$

Or

(अथवा)

Solve the following equation :

$$x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$$

निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$$

11. Find the rank of the matrix A as given below :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

नीचे दी गई आव्यूह A की कोटि (रैंक) ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

THE VIDYARTHI

Or

(अथवा)

(a) Verify that the following matrix A is orthogonal :

$2\frac{1}{2}/5$

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

जाँचिए कि नीचे दी गई आव्यूह A ऑर्थोगोनल है :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) If $(a+ib)^p = m^{x+iy}$, then prove that : $2\frac{1}{2}/5$

$$\frac{y}{x} = \frac{2\tan^{-1}(b/a)}{\log(a^2+b^2)}$$

where only principal values are considered.

यदि $(a+ib)^p = m^{x+iy}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{y}{x} = \frac{2\tan^{-1}(b/a)}{\log(a^2+b^2)}$$

THE
VIDYARTHI