THE VIDYARTHI

6119

B. A./B. Sc. (First Semester) EXAMINATION, 2019-20

MATHEMATICS

Paper Second

(Differential Calculus)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : $\begin{cases} B.A.: 35 \\ B.Sc.: 75 \end{cases}$

Note : There are two Sections in this paper. Attempt any *five* questions from Section A. All the *three* questions are compulsory in Section B.

इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड हैं। खण्ड 'अ' से किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए। खण्ड 'ब' के सभी तीन प्रश्न अनिवार्य हैं।

Section—A 4/9 each

(खण्ड—अ)

1. (a) Evaluate the limit, if exists :

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

सीमा ज्ञात कीजिए, यदि यह अस्तित्व में है :

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

(b) Evaluate :

$$D^n (x^2 e^x)$$

THE VIDYARTHI

मान ज्ञात कीजिए :

$$D^n (x^2 e^x)$$

2. (a) Prove that a constant function is a differentiable function.

सिद्ध कीजिए कि एक नियत फलन अवकलनीय फलन होता है।

(b) Expand $(1+x)^m$ by Maclaurin's series.

मैक्लॉरिन श्रेणी द्वारा $(1+x)^m$ का विस्तार कीजिए।

3. Show that the function $f(x)=[x]+[-x]$ has removable discontinuity for integral values of x.

दिखाइये कि फलन $f(x)=[x]+[-x]$, x के पूर्णांक मान के लिए हटाये जाने वाली असतता है।

4. Prove that if f is continuous on $[a,b]$ and $f'(x)\geq 0$ in (a,b), then f is increasing on $[a,b]$.

सिद्ध कीजिए कि, यदि फलन f $[a,b]$ में सतत् है तथा (a,b) में $f'(x)\geq 0$ है, तब फलन f $[a,b]$ में आरोही फलन है।

5. (a) If $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$, show that :

$$x^2 y_2 + xy_1 + y = 0 .$$

यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, दिखाइये कि :

$$x^2 y_2 + x y_1 + y = 0.$$

(b) Find the equation of tangent at the point 't' to the curve :

$$x = a(t + \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

THE VIDYARTHI

वक्र :

$$x = a(t + \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

के बिन्दु 't' पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. Prove that the Pedal equation of the curve $r^n = a^n \sin n\theta$ is $pa^n = r^{n+1}$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $r^n = a^n \sin n\theta$ का पदिक समीकरण $pa^n = r^{n+1}$ है।

7. Find the curvature of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$ at the point $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$.

वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ के बिन्दु $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ पर वक्रता ज्ञात कीजिए।

8. Prove that :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

Section—B

(खण्ड—ब)

5/10 each

9. Discuss the applicability of Rolle's theorem to $f(x) = \log\left[\frac{x^2 + ab}{(a+b)x}\right]$ in the interval $[a, b], 0 < a < b$.

अन्तराल $[a, b], 0 < a < b$ में $f(x) = \log\left[\frac{x^2 + ab}{(a+b)x}\right]$ के लिए रौली प्रमेय की उपयुक्तता की विवेचना कीजिए।

Or

(अथवा)

Expand $y = \left[x + \sqrt{1+x^2}\right]^m$ in powers of x.

$y = \left[x + \sqrt{1+x^2}\right]^m$ को x की घात के रूप में विस्तारित कीजिए।

10. Find all the asymptotes of the curve :

$$x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - xy + 2 = 0.$$

वक्र :

$$x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - xy + 2 = 0$$

की सभी अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Find the nature and position of double points on the curve :

$$a^4y^2 = x^4(2x^2 - 3a^2)$$

THE VIDYARTHI

वक्र :

$$a^4 y^2 = x^4 (2x^2 - 3a^2)$$

पर द्विक बिन्दुओं की स्थिति तथा प्रकृति ज्ञात कीजिए।

11. Show that in rectangular hyperbola $r^2 \cos 2\theta = a^2$, $\rho = r^3/q^2$.

लम्बकोणीय अतिपरवलय $r^2 \cos 2\theta = a^2$ में $\rho = r^3/q^2$ दिखाइये।

Or

(अथवा)

Trace the curve :

$$y^2 (a+x) = x^2 (a-x)$$

वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$y^2 (a+x) = x^2 (a-x)$$

THE VIDYARTHI