

6220

**B. A./B. Sc. (Second Semester)
EXAMINATION, 2017
MATHEMATICS
Paper Third
(Analytical Geometry)**

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 75

Note : There are three Section A, B and C in this paper. Section A is compulsory. Attempt *four* questions from Section B and any *two* questions from Section C. Marks allotted to each question are indicated. Symbols used have their usual meanings.

इस प्रश्न-पत्र में 'अ', 'ब' तथा 'स' तीन खण्ड हैं। खण्ड 'अ' अनिवार्य है। खण्ड 'ब' से चार प्रश्न तथा खण्ड 'स' से दो प्रश्न हल कीजिए। प्रश्नों को आवंटित अंक इंगित हैं। प्रयुक्त संकेतों के सामान्य अर्थ हैं।

Section—A

(खण्ड—अ)

**Objective Type Questions
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)**

1. Select the most appropriate choice :

2 each

उचित विकल्प का चयन कीजिए :

(i) The intersection of two spheres is :

(a) Line

P. T. O.

(b) Plane

(c) Circle

(d) Sphere

दो गोलों का प्रतिच्छेद है :

(अ) रेखा

(ब) समतल

(स) वृत्त

(द) गोला

**THE
VIDYARTHI**

(ii) A straight line lying on the surface of a cone is called its :

(a) Generator

(b) Tangent

(c) Normal

(d) Axis

सरल रेखा जो शंकु के तल पर स्थित है, शंकु की कहलाती है।

(अ) जनक रेखा

(ब) स्पर्श रेखा

(स) अभिलम्ब

(द) अक्ष

(iii) the number of normals that can be drawn to an ellipsoid from any point is :

(a) 1

(b) 2

(c) 4

(d) 6

दीर्घवृत्तज पर किसी बिन्दु से डाले गये अभिलम्बों की संख्या है :

(अ) 1

(ब) 2

(स) 4

(द) 6

**THE
VIDYARTHI**

(iv) In cylindrical coordinates (r, θ, z) the volume element is :

(a) $r dr d\theta dz$

(b) $dr d\theta dz$

(c) $r^2 \sin \theta dr d\theta dz$

(d) $z^2 dr d\theta$

बेलनीय निर्देशांक (r, θ, z) में आयतन एकक है :

(अ) $r dr d\theta dz$

(ब) $dr d\theta dz$

(स) $r^2 \sin \theta dr d\theta dz$

(द) $z^2 dr d\theta$

(v) In spherical coordinates (r, θ, ϕ) , $\theta = C$ represents :

- (a) Sphere
- (b) Right circular cone
- (c) Plane
- (d) Curve

गोलीय निर्देशांक (r, θ, ϕ) में, $\theta = C$ निरूपित करता है :

- (अ) गोला
- (ब) लम्बवृत्तीय शंकु
- (स) समतल
- (द) वक्र

**THE
VIDYARTHI**

Write True/False against each statement.

1 each

प्रत्येक वाक्य के सम्मुख सत्य/असत्य लिखिए।

(vi) The equation $3x^2 - 4y^2 - 5z^2 = 1$ represents a hyperboloid of one sheet. (True/False)

समीकरण $3x^2 - 4y^2 - 5z^2 = 1$ एक पत्रक के अतिपरवलयज को निरूपित करती है। (सत्य/असत्य)

(vii) The cone $x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$ has three mutually perpendicular generators. (True/False)

शंकु $x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$ की तीन परस्पर लम्बवृत्त जनक रेखाएँ हैं। (सत्य/असत्य)

(viii) The equation of tangent plane at (α, β, γ) on the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$ is $a\alpha x + b\beta y = c(z + \gamma)$.
(True/False)

परवलयज $ax^2 + by^2 = 2cz$ के बिन्दु (α, β, γ) पर स्पर्श समतल का समीकरण $a\alpha x + b\beta y = c(z + \gamma)$ है।
(सत्य/असत्य)

(ix) The equation of right circular cylinder of radius 4 whose axis is the y -axis, is $x^2 + z^2 = 16$.
(True/False)

4 त्रिज्या के लम्बवृत्तीय बेलन जिसका अक्ष y -अक्ष है, का समीकरण $x^2 + z^2 = 16$ है।
(सत्य/असत्य)

(x) All generators of a cone are concurrent.
(True/False)

शंकु की सभी जनक रेखायें संगामी होती हैं।
(सत्य/असत्य)

Section—B

(खण्ड—ब)

THE
VIDYARTHI

2. (a) Prove that the diameter of a sphere always subtends a right angle at any point on the surface of the sphere. $3\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि गोले का व्यास उसके पृष्ठ के किसी भी बिन्दु पर समकोण बनाता है।

- (b) Find the equation of the sphere which passes through the point (α, β, γ) and the circle $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$. 4

गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए कि जो बिन्दु (α, β, γ) तथा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ से होकर जाता है।

3. (a) Find the equation of sphere with centre at $(2, -3, 4)$ at which passes through the point $(1, 2, -1)$. $3\frac{1}{2}$

बिन्दु $(2, -3, 4)$ पर केन्द्र वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 2, -1)$ से होकर जाता है।

- (b) A plane passes through a fixed point (p, q, r) and cuts the axes in A, B and C. Show that the locus of centre of the sphere OABC is $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2$. 4

एक समतल नियत बिन्दु (p, q, r) से होकर जाता है तथा अक्षों को बिन्दुओं A, B तथा C पर काटता है। दिखाइये कि गोले OABC के केन्द्र का बिन्दु-पथ

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2 \text{ है।}$$

**THE
VIDYARTHI**

4. (a) Prove that the cones $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ and $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$ are reciprocal to each other. $3\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ तथा

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0 \text{ एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं।}$$

- (b) Find the enveloping cone of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 1$ with its vertex at $(1, 1, 1)$. 4

गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z = 1$ के एन्वेलपिंग शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष बिन्दु $(1, 1, 1)$ पर है।

THE
VIDYARTHI

5. (a) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin and whose axis is the line $x = t, y = 2t, z = 3t$ and which has a vertical angle of 60° . 4

उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल-बिन्दु पर है, अक्ष रेखा $x = t, y = 2t, z = 3t$ है तथा शीर्ष कोण 60° है।

- (b) Find the equation of the right circular cylinder whose axis is $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ and radius is 5. $3\frac{1}{2}$

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ है तथा त्रिज्या 5 है।

6. Show that the tangent planes at the extremities of any diameter of an ellipsoid are parallel. $7\frac{1}{2}$

दिखाइये कि दीर्घवृत्तज के किसी व्यास के शीर्षों पर स्पर्श-तल समान्तर होते हैं।

7. Derive the expression for curl in curvilinear coordinates. 7 $\frac{1}{2}$

वक्रिय निर्देशांकों में कर्ल का व्यंजक स्थापित कीजिए।

Section—C

(खण्ड—स)

8. (a) Find the condition for orthogonal intersection of two spheres. 7

दो गोलों के लम्बवत् कटान होने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

THE
VIDYARTHI

- (b) The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the coordinate axes in A, B, C. Prove that the equation of the cone generated by the lines drawn from O to meet the circle ABC is

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0. \quad 8$$

समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ निर्देशांक-अक्षों को A, B, C पर

काटता है। सिद्ध कीजिए कि मूलबिन्दु O से वृत्त ABC पर रेखाओं द्वारा जनित शंकु का समीकरण

$$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$$

है।

9. (a) Prove that the plane $x+2y-z=4$ cuts the sphere $x^2+y^2+z^2-x+z-2=0$ in a circle of radius unity and find the equation of the sphere which has this circle as one of its great circles. 8

सिद्ध कीजिए कि समतल $x+2y-z=4$ गोले $x^2+y^2+z^2-x+z-2=0$ को इकाई त्रिज्या के वृत्त में काटता है तथा उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए उक्त वृत्त का एक बड़ा वृत्त है।

- (b) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is the ellipse $x^2+2y^2=1, z=3$. 7

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखायें रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा गाइडिंग वक्र, दीर्घवृत्त $x^2+2y^2=1, z=3$ है।

10. Show that the equation

**THE
VIDYARTHI**

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = 1$$

represents an ellipsoid the squares of whose semi-axes are $2, 2, \frac{1}{2}$. Show also that the equations of its axis of revolution are $x = y = z$.

[10]

दिखाइये कि समीकरण :

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = 1,$$

एक दीर्घवृत्तज को निरूपित करता है जिसके अर्द्ध-अक्षों के वर्ग

$2, 2, \frac{1}{2}$ हैं तथा इसकी परिभ्रमण अक्ष का समीकरण

$$x = y = z \text{ है।}$$

11. Find the equation of the director sphere of the conicoid

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

15

कॉनिकॉइड $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के डायरेक्टर गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

THE
VIDYARTHI